Examen de Admisión a la Maestría / Doctorado
25 de Mayo de 2020

Nombre: ____

Instrucciones: En cada reactivo circula las respuestas correctas. Para una misma pregunta pueden haber varias soluciones correctas (elige todas, pero se restará puntaje por opciones incorrectas elegidas). Puedes hacer cálculos en las hojas que se te proporcionaron, pero no las tienes que entregar. El examen cuenta de 30 reactivos. Te sugerimos leer primero todos los enunciados. **No se puede usar calculadora o celular.**

Duración del examen: 2 horas

1. Sean A y B subespacios de un espacio vectorial V. ¿Cuál de los siguientes es un subespacio de V?

   a) $A \cap B$;
   b) $A \cup B$;
   c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
   d) $A \setminus B$;
   e) $V \setminus A$.

2. Sea $v_1, \ldots, v_n$ una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

   a) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle$;
   b) $\|x\|^2 = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle^2$ si para todo i se tiene que $\|v_i\|^2 = P$;
   c) $\|x\|^2 = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle$ si para todo i se tiene que $\|v_i\| = P$;
   d) $\|x\|^2 = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle^2$ si para todo i se tiene que $\|v_i\| = P$;
   e) $\|x\|^2 = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle$ si para todo i se tiene que $\|v_i\|^2 = P$;

3. Sean U, V y W tres espacios vectoriales sobre un mismo campo K. Sean $g : U \to V$ y $f : V \to W$ transformaciones lineales. Sea $u_1, \ldots, u_m$ una base de U. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta?

   a) Si $\dim(U) = \dim(W)$ y $f \circ g(u_1), \ldots, f \circ g(u_m)$ genera a W, entonces la dimensión de rango(g) es igual a m.
   b) Si $\dim(W) \leq \dim(U)$ entonces $f \circ g(u_1), \ldots, f \circ g(u_m)$ genera a W.
   c) Si $\ker(f) = \{0\}$ entonces $f \circ g(u_1), \ldots, f \circ g(u_m)$ es linealmente independiente.
   d) Si $\dim(U) = \dim(W)$ y $f \circ g(u_1), \ldots, f \circ g(u_m)$ genera a W, entonces $\ker(f) = \{0\}$.
   e) $f \circ g(u_1), \ldots, f \circ g(u_m)$ es una base para W.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & -6 \\ -6 & 6 & 13 \end{pmatrix}$. ¿Cúal de las siguientes es una base para el eigenespacio correspondiente al eigenvalor $\lambda = 7$?

   a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$;

   b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$;

   c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$;

   d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$;

   e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos es un espacio vectorial?

   a) El conjunto de matrices A de 2×2 tales que $\det(A) = 0$;

   b) El conjunto de matrices A de 2×2 tales que $\operatorname{tr}(A) = 1$;

   c) El conjunto de números reales positivos con la suma dada por $x \oplus y = xy$ y la multiplicación por escalares dada por $a \otimes x = x^a$.

   d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_3 = 2\}$;

   e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$;

6. Sea V el espacio vectorial de los números reales sobre el campo de los números racionales. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   a) $\dim(V)$ es numerable;

   b) $\dim(V)$ no es numerable;

   c) $\dim(V) = 1$;

   d) V no tiene base.

   e) V no es un espacio vectorial.

7. Un grafo G es un par (V, E) donde $V = \{1, \ldots, n\}$ es un conjunto de vértices, y E es un conjunto de pares de vértices llamados *aristas*. Si $\{i, j\} \in E$ decimos que i y j son adyacentes. Sea A la matriz de $n \times n$ donde $A_{ij} = 1$ si i es adyacente a j y $A_{ij} = 0$ de otro modo. Supón que todo vértice de G es adyacente exactamente con d otros vértices. Entonces:

   a) A siempre es invertible;
   b) A es triangular superior;
   c) $(1, \ldots, 1)$ es un eigenvector de A.
   d) $A = A^{-1}$
   e) $\det(A) = 0$.

8. Sea V el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$, equipado con el producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

   ¿Cuáles de las siguientes son bases ortonormales para V?

   a) $\operatorname{sen}(t), \cos(t)$;
   b) $1, t, t^2$;
   c) $1, t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}$;
   d) $1, 2\sqrt{3}(t - \frac{1}{2}), 6\sqrt{5}(t^2 - t + \frac{1}{6})$;
   e) $1, (t - \frac{1}{2}), (t^2 - t + \frac{1}{6})$.

9. Considere a $V = \mathbb{Z}_3^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$. ¿Cuántos subespacios de dimensión 1 tiene V?

   a) $(3^n - 1)/2$;
   b) $(3^n - 1)$;
   c) $3n$;
   d) $3n/2$
   e) 1.

10. Sea P_3 el espacio vectorial de polinomios en R de grado a lo más 3. Sea $D : P_3 \to P_3$ el operador diferencial definido por $D(p(t)) = dp/dt$. ¿Cuál de las siguientes es la matriz de D con respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

11. Sean A y B dos matrices complejas Hermitianas de $n \times n$ y sean

$$C_1 = A + B, C_2 = iA + (2+3i)B \text{ y } C_3 = AB.$$

¿Cuáles de C_1, C_2 y C_3 son Hermitianas?

a) solo C_1;

b) solo C_2;

c) solo C_3;

d) ninguna;

e) todas;

12. Sean A y B dos matrices reales de $n \times n$. Sea $\mathrm{tr}(A)$ la traza de la matriz A. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones siempre se cumple?

a) $\mathrm{tr}(ABCD) = \mathrm{tr}(BCDA)$;

b) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$;

c) $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(ACB)$;

d) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$;

e) $\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A^{-1}) + \mathrm{tr}(B^{-1})$

13. ¿Cuánto vale
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x) + \sin(2x) + 1}{x^2 - \pi^2}?$$

a) $\frac{1}{2\pi}$;

b) $\frac{1}{\pi}$;

c) 1;

d) 0;

e) no existe el límite.

14. Sea
$$f(x) = \int_1^{x^3} \frac{1}{1 + \ln t} \mathrm{d}t.$$
¿Cuánto vale $f'(2)$?

a) $\frac{1}{1+\ln 2}$;

b) $\frac{12}{1+\ln 2}$;

c) $\frac{1}{1+\ln 8}$;

d) $\frac{12}{1+\ln 8}$;

e) $\frac{8}{1+\ln 2}$;

15. Si $\sin(xy) = x$ entonces $\frac{dy}{dx}$ es igual a

a) $\frac{1}{\cos(xy)}$;

b) $\frac{1}{x\cos(xy)}$;

c) $\frac{1-y\cos(xy)}{x\cos(xy)}$.

d) $\frac{1-\cos(xy)}{\cos(xy)}$;

e) $\frac{1-x\cos(xy)}{y\cos(xy)}$;

16. ¿Cuánto vale
$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|<n} \int_{|y|<n} \sin\left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy?$$

a) π;

b) $-\pi$;

c) 0;

d) 1;

e) no converge;

17. Calcular
$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$
    a) ∞;
    b) 1;
    c) 0;
    d) $\sqrt{2}$;
    e) e.

18. Encuentra la derivada con respecto a x de $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.
    a) $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$;
    b) $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$;
    c) $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$;
    d) $2+\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[2+\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(2+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]$;
    e) $\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]$.

19. Sea $s(t)=(3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 2)$. ¿Cuál es el vector tangente unitario a s en $t=\pi/6$?
    a) $(-\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2, 0)$;
    b) $(-1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$;
    c) $(-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$;
    d) $(1,1,1)$;
    e) $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

20. Sea $u(x,y)=(a^2x-by^2)^{1/2}$ para $a^2x-by^2>0$. ¿Cuáles de las siguientes es igual a
$$b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}?$$
    a) $\frac{ab}{2}\frac{a-2y}{\sqrt{a^2x-by^2}}$;
    b) $2ab\frac{a-2y}{\sqrt{a^2x-by^2}}$;

c) $ab\frac{a-2y}{\sqrt{a^2x-by^2}}$;

d) $\frac{ab}{2}\frac{2x-y^2}{\sqrt{a^2x-by^2}}$;

e) $ab\frac{2x-y^2}{\sqrt{a^2x-by^2}}$;

21. Calcula

$$\int_0^2\int_0^1 x^3ye^{x^2y^2}dxdy.$$

a) $\frac{e^4-5}{16}$;

b) $\frac{e^4-5}{8}$;

c) $\frac{e^4}{8}-\frac{1}{72}$;

d) $\frac{e^4}{4}-1$;

e) $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{18}$.

22. Calcula la derivada parcial de la función

$$f(x,y,z)=e^{1-x\cos(y)}+ze^{-1/(1+y^2)}$$

con respecto a x en el punto $(1,0,\pi)$.

a) -1;

b) 1;

c) $-1/e$;

d) 0;

e) π;

23. Sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones paramétricas

$$x(t)=\cos(e^t);$$
$$y(t)=\operatorname{sen}(e^t);$$
$$z(t)=e^t;$$

con $t\in[0,2]$ ¿Qué longitud tiene la curva?

a) $\int_0^2\sqrt{1+e^{2t}}dt$;

b) e^4-1;

c) $\frac{e^4+3}{2}$.

d) $\sqrt{2}(e^2-1)$;

e) π.

24. ¿Cuál es el volumen de la región cerrada en $\mathbb{R}^3$ acotada por $z = 9 - x^2 - y^2$ y $z = 0$?

    a) $\frac{27\pi}{2}$
    b) 18π;
    c) $\frac{81\pi}{2}$
    d) $\frac{81\pi}{4}$
    e) 81π.

25. Sea $X = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, un subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$, y $P = \{(n, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$. Entonces en el espacio X

    a) P es cerrado pero no abierto.
    b) P es abierto pero no cerrado.
    c) P es abierto y cerrado.
    d) P no es abierto ni cerrado.
    e) X no es un subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$

26. Dado cualquier real positivo $x_1 > 0$, sea x_n la sucesión definida recursivamente x_{n+1} es igual al promedio entre x_n y $2/x_n$. ¿Cuánto vale $\lim_{n\to\infty} x_n$?

    a) el límite siempre es $\sqrt{2}$;
    b) el límite siempre es $\sqrt[3]{3}$;
    c) el límite es $\sqrt[3]{3}$ para algún $x_1 > 0$;
    d) el límite no existe para algún $x_1 > 0$.
    e) $\sqrt{2}x_1$;

27. ¿Cuántos homomorfismos hay entre $\mathbb{Z}_{18}$ y $\mathbb{Z}_{30}$?

    a) 2;
    b) 0;
    c) 6;
    d) 3;
    e) 30;

28. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión que satisface que

$$a_0 = 1 \text{ y } a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1} \text{ para todo } n \geq 1.$$

    Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.

b) $xf^2(x) - xf(x) + 1 = 0$.

c) $f^2(x) + xf(x) - 1 = 0$;

d) $f^2(x) - xf(x) + 1 = 0$.

e) $xf^2(x) + f(x) - 1 = 0$;

29. ¿Cuáles de los siguientes son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$?

a) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1, x \text{es irracional } \}$;

c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$.

d) $\mathbb{Z}$;

e) $\mathbb{Q}$.

30. Calcula

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left| e^{\frac{2\pi i k}{n}} - e^{\frac{2\pi i (k-1)}{n}} \right|.$$

a) 0;

b) 2π;

c) π;

d) $2i$;

e) $2e$;