Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

18 de Junio de 2007

Instrucciones: Resolver todos los problemas de las secciones 1 y 2 y los que pueda de la sección 3. Todas las soluciones deben ser apropiadamente justificadas. El examen tiene una duración de 2 horas.

1. Algebra lineal

1.1 Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Encuentre una matriz no singular P tal que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y pruebe que

$$A^n = \frac{3^n - 1}{2}A + \frac{3 - 3^n}{2}I_2.$$

1.2 Sea A la matriz $n \times n$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Pruebe que: $\det(A) = (a-1)^{n-1}(a+n-1)$.

1.3 Encuentre una base para el espacio solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2. Cálculo

2.1 Determine la convergencia o divergencia de las integrales siguientes. En caso de ser convergente, evalue la integral.

$$(a).\quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2} \qquad\qquad (b).\quad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

2.2 Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! + 4^{n+1}}{(3n+1)!}$ es convergente o no.

2.3 Encuentre los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ y determine si corresponden a máximos, mínimos o punto silla.

3. Problemas opcionales

3.1 Sea $M_n(\mathbb{R})$, el álgebra de matrices $n \times n$, con la suma, multiplicación y producto por escalar usuales. Demuestre que en $M_n(\mathbb{R})$ no existen ideales bilaterales no triviales.

3.2 Enumere todos los grupos de orden 8. ¿Cuales de ellos son abelianos?

3.3 Sea $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ una función arbitraria entre espacios métricos. Pruebe que f es continua si y sólo si $\forall\, K \subset X$ compacto, $f\,|_K$ es continua.