Examen de Admisión a la Maestría / Doctorado
9 de Diciembre de 2016

Nombre: ____

Instrucciones: En cada reactivo seleccione la respuesta correcta encerrando en un círculo la letra correspondiente. Puede hacer cálculos en las hojas que se le proporcionaron.

Duración del examen: 2 horas

1. ¿Cuál de los siguientes no es un espacio vectorial?

   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$
   (b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 = x_2^2\}$
   (c) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 = 0\}$
   (c) El conjunto de matrices 2×2, A, tales que traza$(A) = 0$
   (d) El conjunto de funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2. La tercera potencia de la matriz $\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ es igual a:

   (a) $\begin{pmatrix} x^3 & 1 & 0 \\ 0 & x^3 & 1 \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} x^3 & 3x & 1 \\ 0 & x^3 & 3x \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} x^3 & 0 & 1 \\ 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} x^3 & 3x^2 & 0 \\ 0 & x^3 & 3x^2 \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x \\ 0 & x^3 & 3x^2 \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$

3. La matriz $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ es:

   (a) antisimétrica (b) autoadjunta (c) ortogonal

   (d) diagonalizable sobre los reales (e) ninguna de las anteriores

4. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$, equipado con el producto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

Una base ortonormal para V está dada por:

(a) $1,\ t,\ t^2$ (b) $\operatorname{sen} t,\ \cos t$ (c) $1, \quad 2\sqrt{3}(t-\frac{1}{2}), \quad 6\sqrt{5}(t^2 - t + \frac{1}{6})$

(d) $1, \operatorname{sen} t, \cos t$ (e) $1, \quad (t-\frac{1}{2}), \quad (t^2 - t + \frac{1}{6})$

5. El polinomio mínimo de la matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es:

(a) $\lambda^2 - (2\cos\theta)\lambda + 1$ (b) $\lambda^2 + 1$ (c) $\lambda^2 - 2\lambda + 1$

(d) $(\lambda - e^{i\theta})^2$ (e) $\lambda - \cos 2\theta$

6. Una matriz $n \times n$, A, es antisimétrica si: $A^t = -A$. Para toda A antisimétrica:

(a) $\det A = 0$ si n es impar
(b) $\det A = 0$ si n es par
(c) $\det A = \pm 1$
(d) $\det A = 1$ si n es impar
(e) $\det A = -1$ si n es par

7. ¿Existirá una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v_i) = w_i$, donde

$v_1 = (0,1,1,1), \quad v_2 = (1,0,1,1), \quad v_3 = (1,1,0,1), \quad v_4 = (-1,1,0,0)$

y $w_1 = (1,2,3), \quad w_2 = (2,3,1), \quad w_3 = (3,1,2), \quad w_4 = (-1,-1,2)$?

(a) Si (b) No, porque v_1, v_2, v_3, v_4 no es una base

(c) Si y es inyectiva (d) No, porque w_1, w_2, w_3, w_4 no es una base

(e) Si y su matriz con respecto a las bases canónicas es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

8. Sea V el conjunto de todas las sucesiones infinitas $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ de números reales con la propiedad $a_i = a_{i-2} + a_{i-1}$ para $i \geq 3$. Entonces:

   (a) V no es un espacio vectorial

   (b) V es un espacio vectorial de dimensión 2

   (c) V es un espacio vectorial de dimensión 3

   (d) V es un espacio vectorial de dimension infinita

   (e) V consiste de la sucesión cero $(0, 0, 0, \dots)$

9. ¿Cual es la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 2, t+2)$, $(-1, t+1, t)$ y $(0, t, 1)$, si $t \in \mathbb{R}$?

   (a) 3 para todo t

   (b) 1 excepto cuando $t = 1$

   (c) 2 excepto cuando $t = -3/2$

   (d) 3 excepto cuando $t = 1, -3/2$

   (e) 2 para todo t

10. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $A^* = \bar{A}^t$ su matriz transpuesta conjugada. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   (a) Si λ es valor propio de A, entonces $-\lambda$ es valor propio de A^*

   (b) Si λ es valor propio de A, entonces $\bar{\lambda}$ es valor propio de A^*

   (c) Si λ es valor propio de A, entonces λ^2 es valor propio de A^*

   (d) Si λ es valor propio de A, entonces $|\lambda|$ es valor propio de A^*

   (e) Ninguna de las anteriores

11. ¿Cuántos subespacios vectoriales posee $\mathbb{R}^2$?

   (a) dos: $\{0\}$ y $\mathbb{R}^2$

   (b) tres: $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ y la diagonal $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

   (c) cuatro: $\{0\}$, $\mathbb{R} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{R}$ (los ejes) y $\mathbb{R}^2$ mismo

   (d) una infinidad

   (e) cero

12. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ y H el subespacio de las matrices 2×3 dado por

$$H = \{M \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$$

Entonces la dimensión de H es:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

13. Considere el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

El sistema siempre tiene solución si:

(a) la matriz A no tiene inversa

(b) la filas de A son linealmente dependientes

(c) las columnas de A son linealmente dependientes

(d) $\det A = 0$

(e) el rango de A es igual al rango de la matriz aumentada $[\,A \,|\, \mathbf{b}\,]$

14. Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la proyección ortogonal sobre la recta $y = 3x$. Si $u = (2, 5)$ y $v = (x, 10)$, ¿cuál es el valor de x tal que $p(u) = p(v)$?

(a) -13 (b) $-\sqrt{10}$ (c) 4 (d) $\sqrt{10}$ (e) 13

15. Sea V el espacio vectorial de funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $T : V \to V$ la transformación lineal

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Entonces:

(a) T es suprayectiva (b) $\dim(\ker T) = 1$ (c) T es biyectiva

(d) T no tiene valores propios (e) ninguna de las anteriores

16. El valor de la integral indefinida $\displaystyle\int x \ln x \, dx$ es igual a:

(a) $\frac{1}{2}x^2 \ln x$ (b) $\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2$ (c) $x(\ln x - 1)$ (d) $\frac{1}{2}x^2(\ln x - 1)$

(e) $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$

17. El valor máximo de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|} + \dfrac{1}{1+|x-8|}$ es:

(a) 10/9 (b) 2/5 (c) 1 (d) 1/9 (e) No existe

18. La serie infinita $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

(a) converge (b) diverge (c) es negativa (d) es igual a $1/e$

(e) es igual a e^e

19. Supongamos que las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ son convergentes, y que $a_n, b_n \geq 0$, para todo $n \geq 1$. Entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

(a) es convergente

(b) no necesariamente es convergente

(c) es estrictamente menor que las series originales

(d) es estrictamente mayor que las series originales

(e) es el promedio de las series originales

20. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por $f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Entonces el límite $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(g(x))$ es igual a:

(a) 0 (b) 1 (c) $f(g(0))$ (d) $g(f(0))$ (e) no existe

21. Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = f(2\pi)$. ¿Existirá un número real $\xi \in [\pi, 2\pi]$ tal que $f(\xi) = f(\xi - \pi)$?

(a) Siempre existe.

(b) Sólo si f es es periódica de periodo π

(c) Sólo si f' y f'' existen en el intervalo $[0, 2\pi]$

(d) Sólo si f es diferenciable en $[0, 2\pi]$.

(e) No, $f(x) = \operatorname{sen} x$ es un contrajemplo

22. ¿Para que valores $x \in [0, \pi]$ se cumple la igualdad $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$?

(a) Ninguno (b) $x = 0$ (c) $x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi$ (d) $x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi$

(e) $x = 0,\ \frac{2\pi}{3},\ \pi$

23. La solución general de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$ es:

(a) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 2x$

(b) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 3x$

(c) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$

(d) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$

(e) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

24. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x, y) = xy$. El valor máximo de f sobre la recta $x + y = 1$ es igual a:

(a) 0 (b) 1/4 (c) 1/2 (d) 3/4 (e) 1

25. El área de la región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$ en el intervalo $[0, \pi]$ es:

(a) 0 (b) 5/2 (c) 2 (d) π (e) $3\pi/2$

26. Los valores críticos de a función $f(x) = x^3 - x$ son:

(a) $-1, 0, 1$ (b) $-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}},$ (c) $-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}},$ (d) 3, 2 (e) no tiene

27. Supóngase que la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$ y que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones siempre son válidas?

    (1) Existe $c_1 \in (0,1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.

    (2) Existe $c_2 \in (1,2)$ tal que $f'(c_2) = 0$

    (3) Existe $c \in (0,2)$ tal que $f'(c) = 1/3$

    (a) Las tres son válidas

    (b) Sólo (1) y (2) son válidas

    (c) Sólo (1) y (3) son válidas

    (d) Sólo (2) y (3) son válidas

    (e) Ninguna es válida

28. La fórmula recurrente $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$, $u_1 = 1$ define una sucesión $\{u_n\}$. Esta sucesión es:

    (a) no acotada

    (b) divergente

    (c) convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$

    (d) convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{3}$

    (e) decreciente

29. Considere las funciones hiperbólicas $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Entonces:

    (a) $\cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = 1$ (b) $\operatorname{senh} x$ es acotada (c) $\cosh x$ es acotada

    (d) $\operatorname{senh}(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$ (e) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

30. El valor de límite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \operatorname{sen}^3 x}{5x + 6}$ es:

    (a) $1/5$ (b) $6/5$ (c) $5/6$ (d) 1 (e) ∞