Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

30 de junio de 2014

Nombre: ____________________________
Area: ____________________________
Asesor: ____________________________

Instrucciones: Resolver todos los problemas de las secciones 1 y 2 y los que pueda de la sección 3. Todas las soluciones deben ser apropiadamente justificadas. El examen tiene una duración de 3 horas.

1. **Algebra lineal**

   1.1 Determine para qué valores reales a, b la siguiente matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$:

   $$A := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

   1.2 Sea V el espacio vectorial de todos los polinomios $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots a_n t^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ con coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ en $\mathbb{R}$.

   (a) Demuestre que $B = \{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$ forma una base para V.

   (b) Encuentre una transformación lineal $T : V \to V$ que sea suprayectiva pero que no sea biyectiva.

   1.3 Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Decimos que A es Hermitiana si $A = (\overline{A})^T$, i.e., $[A]_{ij} = \overline{[A_{ji}]}$. Demuestre:

   (a) A es Hermitiana si y sólo si $\langle A\,\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, A\beta\rangle\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$.

   (b) Si A es Hermitiana entonces su espectro $S_{\mathbb{C}}(A)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

2. **Cálculo**

   2.1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Demuestre que si f es continua en 0, entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.

2.2 Calcule la derivada de la función

$$F(x) = \int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t} dt\right)} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt.$$

2.3 Encuentre los siguientes límites

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $a > 0$.

Sugerencia para (a): $n! = n(n+1)\ldots k!$, para $k < n$, en particular para $k < \frac{n}{2}$.

3. **Problemas opcionales**

3.1 Pruebe que si en un grupo G todo elemento es su propio inverso, entonces G es abeliano.

3.2 Calcule la integral $\int_\gamma e^z dz$ donde γ es el arco en el círculo unitario que une 1 con i.

3.3 Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Demuestre que el conjunto $Z_f := \{x \in X | f(x) = 0\}$ es cerrado.

3.4 Dar un ejemplo de una sucesión de funciones $\{f_n\}_n \in L_2(\mathbb{R})$ que converja a 0 puntualmente pero que no converja a 0 en L_2.

3.5 Diseñe una máquina de Türing para enumerar el lenguaje $\{0^n 1^n | n \geq 0\}$.